

Übungen zu Nichtlinearer Optimierung, HWS 2010

Abgabetermin: Montag, 20.09.10

- (1) Man definiere $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(u, v) = (u - 2)^4 + (u - 2v)^2$$

Wenden Sie auf das Minimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \min & f(u, v) \\ \text{bez.} & (u, v) \in \mathbb{R}^2 \end{array}$$

das Gradientenverfahren und das modifizierte Gradientenverfahren mit dem Startwert $x_1 = (0, 3)$ an. Wählen Sie $\sigma = \beta = 1/2$.

- (2) Es seien $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung und (x_k) eine Folge in \mathbb{R}^n . Es gebe eine konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k$ nicht-negativer reeller Zahlen (ε_k) so dass gilt

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) + \varepsilon_k \quad \text{für alle } k$$

Beweisen Sie: Wenn x^* ein Häufungspunkt von (x_k) ist, konvergiert $(f(x_k))$ gegen $f(x^*)$.

- (3) Beweisen Sie für alle $A \in M(p, n)$ und $B \in (n, q)$:

(i) $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$

(ii) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

(iii) $\max\{|a_{i,j}| : i, j\} \leq \|A\| \leq n\sqrt{p} \max\{|a_{i,j}| : i, j\}$

- (4) Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf einem \mathbb{R} -Vektorraum E heißen äquivalent, wenn es $\alpha, \beta > 0$ so gibt, dass gilt

$$\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1 \quad \text{für alle } x \in E$$

(Dann besitzen $(E, \|\cdot\|_1)$ und $(E, \|\cdot\|_2)$ offenbar dieselben konvergenten Folgen.) Zeigen Sie:

a) Äquivalenz von Normen ist eine Äquivalenzrelation.

b) Alle Normen auf \mathbb{R}^n sind äquivalent. Hinweis: Es sei N eine beliebige Norm auf \mathbb{R}^n . Dann zeigt man leicht, dass $id : \mathbb{R}^n \rightarrow (\mathbb{R}^n, N)$ stetig ist. Untersuchen Sie

$$\inf\{N(x) : \|x\| = 1\}$$