

## Zwischenklausur zur Linearen Algebra I, HWS 2006

(1) a) Definieren Sie die Begriffe

- (i) Erzeugendensystem
- (ii) lineare Unabhängigkeit
- (iii) Basis
- (iv) Dimension

b) Geben Sie (ohne Beweis) Beispiele von

- (v) einem Erzeugendensystem, das nicht linear unabhängig ist
- (vi) einer linear unabhängigen Menge, die kein Erzeugendensystem ist.

Die gefragten Definitionen findet man unter:

(1)(i): 3.15, (ii): 4.1, (iii): 4.7, (iv): 4.17

(v)  $K^n$  ist ein EZS von  $K^n$ , aber nicht linear unabhängig.

(vi)  $\emptyset \subseteq K^n$  ist eine linear unabhängige Menge, aber kein EZS von  $K^n$ .

(2) Untersuchen Sie mit Beweis, welche der folgenden Teilmengen des  $\mathbb{R}^3$  Untervektorräume sind, dabei seien  $a, b$  beliebige reelle Zahlen.

a)  $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq 0\}$

b)  $B = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : ax_1 + bx_3 = 0\}$

c)  $C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2 = 1\}$

(2)a)  $A$  ist kein Untervektorraum, denn  $A$  ist keine Untergruppe:

Beweis: Es gilt  $(1, 0, 0) \in A$  aber  $-(1, 0, 0) = (-1, 0, 0) \notin A$ .

b)  $B$  ist ein Untervektorraum.

Beweis:

(i)  $(0, 0, 0) \in B$ , also gilt  $B \neq \emptyset$

(ii) Es gelte  $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in B$ , dann folgt

$$ax_1 + bx_3 = ay_1 + by_3 = 0$$

und daraus

$$a(x_1 + y_1) + b(x_3 + y_3) = 0$$

Dies impliziert

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \in B$$

(iii) Es gelte  $(x_1, x_2, x_3) \in B$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dann folgt  $ax_1 + bx_3 = 0$  und daraus

$$0 = \alpha(ax_1 + bx_3) = a\alpha x_1 + b\alpha x_3$$

Man erhält  $\alpha(x_1, x_2, x_3) \in B$ .

(c)  $C$  ist kein Untervektorraum:

Beweis: Es gilt  $(0, 1, 0) \in C$  aber  $(0, 1, 0) + (0, 1, 0) = (0, 2, 0) \notin C$ , also ist  $C$  keine Untergruppe.

(3) Es sei  $M = \{(1, 0, 1), (2, 0, 1)\}$ . Geben Sie (mit Beweis) eine Basis  $B$  von  $\mathbb{R}^3$  an, die  $M$  enthält.

**Behauptung:**

$$B = \{(1, 0, 1), (2, 0, 1), (0, 1, 0)\}$$

ist eine Basis von  $\mathbb{R}^3$ , die  $M$  enthält.:

**Beweis:** Da  $B$  3 Elemente enthält und  $\dim \mathbb{R}^3 = 3$  gilt, reicht es zu zeigen, dass  $B$  linear unabhängig ist:

Es gelte

$$\alpha(1, 0, 1) + \beta(2, 0, 1) + \gamma(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$$

dann folgt

$$(\alpha + 2\beta, \gamma, \alpha + \beta) = (0, 0, 0)$$

und daraus

$$\alpha + 2\beta = \gamma = \alpha + \beta = 0$$

Es folgt  $\gamma = 0$  und  $\beta = (\alpha + 2\beta) - (\alpha + \beta) = 0$  und aus  $\alpha + \beta = 0$  folgt dann schließlich  $\alpha = 0$ .

(4) Es sei

$$M = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (2, -1, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

Prüfen Sie (mit Beweis), ob  $M$  linear unabhängig ist, ob  $M$  ein Erzeugendensystem von  $\mathbb{R}^3$  ist und ob  $M$  eine Basis von  $\mathbb{R}^3$  ist.

$M$  ist linear abhängig, denn es gilt

$$(2, -1, 1) = 2(1, 0, 1) - 1 \cdot (0, 1, 0)$$

Da eine 3-elementiges EZS des dreidimensionalen  $\mathbb{R}^3$  eine Basis und daher linear unabhängig ist, ist  $M$  kein EZS von  $\mathbb{R}^3$  und damit keine Basis von  $\mathbb{R}^3$ .

(5) Es seien  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  eine Basis von  $V$ . Weiterhin sei  $\lambda \in K$ . Untersuchen Sie mit Beweis, dass

$$B' = \{v_1 + \lambda v_n, v_2, \dots, v_n\}$$

eine Basis von  $V$  ist.

**1. Beweis:** Es gilt

$$v_1 + \lambda v_n = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_{n-1} + \lambda v_n$$

Nach dem Austauschlemma kann man jeden Vektor von  $B$  durch  $v_1 + \lambda v_n$  ersetzen, dessen Koeffizient in dieser Darstellung  $\neq 0$  ist. Wegen  $1 \neq 0$  ist  $B' = \{v_1 + \lambda v_n, v_2, \dots, v_n\}$  eine Basis.

**2. Beweis:** Da  $B$  eine Basis von  $V$  ist, gilt  $\dim V = n$  und da  $B'$  genau  $n$  Elemente enthält, reicht es zu zeigen, dass  $B'$  linear unabhängig ist. Also gelte

$$\alpha_1(v_1 + \lambda v_n) + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

dann folgt

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_{n-1} v_{n-1} + (\lambda \alpha_1 + \alpha_n) v_n = 0$$

Da  $B$  linear unabhängig ist, folgt daraus:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{n-1} = \lambda\alpha_1 + \alpha_n = 0$$

Aus  $0 = \lambda\alpha_1 + \alpha_n = \alpha_n$  folgt dann  $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$