Doppelnebenklassen in der symplektischen Gruppe $GSp(2n)$

(R.Weissauer)

Im folgenden soll eine im Spezialfall $n = 2$ von M.Schröder gefundene Doppelnebenklassenzerlegung der symplektischen Gruppe $GSp(4)$ (siehe [S]) auf den Fall der Gruppe $GSp(2n)$ übertragen werden. Die benutzte Methode läßt sich weiter verallgemeinern. Darüber soll jedoch an anderer Stelle berichtet werden.

<u>Die Gruppe $GSp(2n)$</u>: Sei F ein lokaler nichtarchimedischer Körper mit Restklassencharakteristik $\neq 2$, mit Ganzheitsring $\mathfrak{o}_F$ und Primelement π_F. Sei $G(F) = GSp(2n, F) \subset Gl(2n, F)$ die symplektische Ähnlichkeitengruppe. Es gilt $g \in G(F)$ genau dann, wenn $g'Jg = \lambda(g) \cdot J$ erfüllt ist für einen Skalar $\lambda(g) \in F^*$. Hierbei sei

$$J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$$

und E die Einheitsmatrix. Äquivalent sind $g \in G(F)$ bzw. $(g')^{-1} \in G(F)$ bzw. $g' \in G(F)$. Beachte $J' = J^{-1} = -J \in G(F)$. Sei $G(\mathfrak{o}_F) = GSp(2n, \mathfrak{o}_F)$ die symplektisch unimodulare Gruppe.

<u>Zentralisatoren</u>: Sei $n = i + j$ und obdA $i \leq j$ sowie

$$s \;=\; diag(E^{(i,i)}, -E^{(j,j)}, E^{(i,i)}, -E^{(j,j)}) \;\in\; G(F) \ .$$

Die Zusammenhangskomponente des Zentralisators $H = (G_s)^0$ von s ist maximal zusammenhängend reduktiv in G. $H(F)$ ist isomorph zur Untergruppe aller Matrizen (g_1, g_2) von $GSp(2i, F) \times GSp(2j, F)$ mit Ähnlichkeitsfaktor $\lambda(g_1) = \lambda(g_2)$

$$1 \to \; H(F) \;\to\; GSp(2i, F) \times GSp(2j, F) \;\to\; F^* \to 1 \ .$$

<u>Die Matrizen $g(e_1, .., e_i)$</u>: Es bezeichne $g(e_1, ..., e_i)$ die obere Dreiecksmatrix

$$g(D) = \begin{pmatrix} E & S \\ 0 & E \end{pmatrix} \quad , \quad S = \begin{pmatrix} 0^{(i,i)} & D \\ D' & 0^{(j,j)} \end{pmatrix} \ ,$$

welche durch $D = (diag(\pi_F^{e_1}, ..., \pi_F^{e_i}) \ , \ 0^{(i,j-i)})$ definiert ist. Wir nehmen dabei $e_\nu \in \mathbb{Z}$ sowie $e_1 \leq e_2 ... \leq e_i \leq \infty$ an.

Proposition: *Die Matrizen $g(e_1,..,e_i)$ mit $e_1 \leq e_2... \leq e_i \leq \infty$, für die $e_\nu < 0$ oder $e_\nu = \infty$ für alle $\nu = 1,..,i$ gilt, bilden ein Repräsentantensystem der Doppelnebenklassen*

$$H(F) \setminus G(F) \ /G(\mathfrak{o}_F) \ .$$

<u>Bemerkung</u>: Eine alternative Repräsentantenwahl wären die $g(e_1,...,e_i)$ mit $e_1 \leq ... \leq e_i \leq 0$. Mit diesen Repräsentanten folgt als

Korollar: *Sei T der Torus der Diagonalmatrizen in H beziehungsweise G. Dann existiert ein $r \in G(F)$, so daß die Menge $\{trt^{-1} \mid t \in T(F)\}$ der Konjugierten von r ein vollständiges Repräsentantensystem von $H(F)\backslash G(F)/G(\mathfrak{o}_F)$ enthält.*

Wähle zum Beispiel $r = g(0,..,0) \in G(\mathfrak{o}_F)$. Für $\mathbf{D} = diag(D, E, D^{-1}, E) \in T(F)$ und $D = diag(\pi_F^{e_1},..,\pi^{e_i})$ gilt dann $\mathbf{D}r\mathbf{D}^{-1} = g(e_1,...,e_i)$.

Der Beweis der Proposition umfaßt mehrere Schritte:

1) <u>Die parabolische Untergruppe P_s</u>: Es gibt eine maximale parabolische Untergruppe $P = P_s$ von G mit einer Levikomponente L in $H = H_s$. Sei $P = L \cdot N$ und N das unipotente Radikal. Mittels der Iwasawazerlegung $G(F) = L(F) \cdot N(F) \cdot G(\mathfrak{o}_F)$ findet man Repräsentanten $g(M,N,U,V) \in N(F)$. Diese haben die Form

$$g(M,N,U,V) = \begin{pmatrix} E & M & U & N \\ 0 & E & * & V \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & -M' & E \end{pmatrix} \ .$$

Es gilt $g(0,0,0,V)g(M,N,U,0) = g(M,N,U,V)$. Die Matrix $V = V' = V^{(j,j)}$ ist notwendiger Weise symmetrisch. Wegen $g(0,0,0,V) \in H(F)$ können wir daher für die Repräsentanten $V = 0$ annehmen. Wir schreiben dann auch $g(M,N,*) = g(M,N,*,0)$.

$$g(M,N,*) = \begin{pmatrix} E & M & * & N \\ 0 & E & N' & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & -M' & E \end{pmatrix} \ .$$

Hierbei sind $M, N \in Hom_F(F^j, F^i)$ beliebig.

2) Es gilt $g(M_1, N_1, U_1) \cdot g(M_2, N_2, U_2) = g(M_1 + M_2, N_1 + N_2, U_1 + U_2 + M_1 \cdot N_2' - N_1 \cdot M_2')$ und somit $g(M, N, U) \cdot g(0, 0, \tilde{U}) = g(0, 0, \tilde{U}) \cdot g(M, N, U) = g(M, N, \tilde{U} + U)$ sowie $g(0, 0, U) \in H(F)$. $S = U - M \cdot N'$ ist symmetrisch. Für symmetrisches $S = S'$ liegt $g(0, 0, S)$ in $H(F)$. Daher können wir als Repräsentanten

$$g(M, N) = g(M, N, M \cdot N')$$

wählen. Es gilt $g(M_1, N_1) g(M_2, N_2) = g(M_1 + M_2, N_1 + N_2, M_1 N_1' + M_2 N_2' + M_1 N_2' - N_1 M_2') = g(M_1 + M_2, N_1 + N_2, (M_1 + M_2)(N_1 + N_2)' - M_2 N_1' - N_1 M_2') = g(0, 0, -M_2 N_1' - N_1 M_2') \cdot g(M_1 + M_2, N_1 + N_2)$. Also

$$H(F) \cdot g(M_1, N_1) g(M_2, N_2) \cdot G(\mathfrak{o}_F)$$

$$= \; H(F) \cdot g(M_1 + M_2, N_1 + N_2) \cdot G(\mathfrak{o}_F) \; .$$

Somit können wir die Elemente $(M, N) \in Hom_F(F^{2j}, F^i)$ beliebig modulo $Hom_{\mathfrak{o}_F}(\mathfrak{o}_F^{2j}, \mathfrak{o}_F^i)$ abändern.

3) Wir haben später mit dem Spezialfall $M = (A, 0)$, $N = (B, 0)$ mit $A = A^{(i,i)}$ und $B = B^{(i,i)}$ zu tun. Wir schreiben dann kurz $g(A, B)$ oder $g(A, B, *)$ anstatt $g(M, N)$ resp. $g(M, N, *)$. Die obigen Formeln gelten dann auch mit A, B anstelle von M, N. Ist

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ A_1 & A_2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} B_0 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$$

mit $k \times k$-Matrizen A_0, B_0 und $k < i$ und ganzen Matrizen A_1, A_2, B_1, dann kann wegen Schritt 2) die Matrix A_1, A_2 durch Null und B_1 durch die Einheitsmatrix ersetzt werden, ohne daß die Doppelnebenklasse sich ändert.

4) <u>Weitere Modifikationen</u>: Für $U_i \in Gl(i, \mathfrak{o}_F)$ erhält man äquivalente Repräsentanten $g(M, N, *)$ und $g(U_i \cdot M, U_i \cdot N, *)$ durch Konjugation mit $diag(U_i, E, (U_i')^{-1}, E)$.

5) Auf $Hom_F(F^{2j}, F^i)$ (d.h. auf den $i \times 2j$-Matrizen) operieren Elemente $g \in Sp(2j, \mathfrak{o}_F)$ durch Rechtsmultiplikation

$$(\tilde{M}, \tilde{N}) = (M, N) \cdot g^{-1} \; .$$

$g(M,N,*)$ und $g(\tilde{M},\tilde{N},*)$ definieren dabei dieselbe Nebenklassen. Es genügt dies für Erzeuger g der Gruppe $Sp(2j,\mathfrak{o}_F)$ zu zeigen. Benutze dazu $w_j \cdot g(M,N,0)\cdot w_j^{-1} = g(N,-M,*)$ und $u_T \cdot g(M,N,0)\cdot u_T^{-1} = g(M,N-MT,*)$ für die erzeugenden Matrizen (siehe [F], Satz A.5.4)

$$w_j = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & -E & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$u_V = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & V \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix} .$$

Für ganzes symmetrisches V liegen diese im Durchschnitt von $G(\mathfrak{o}_F)$ und $H(F)$. Wir können daher obdA Repräsentanten in der Klasse von (A,B) in

$$Gl(i,\mathfrak{o}_F)\setminus Hom_F(F^{2j},F^i)\ /Sp(2j,\mathfrak{o}_F)$$

betrachten und noch beliebig modulo $Hom_{\mathfrak{o}_F}(\mathfrak{o}_F^{2j},\mathfrak{o}_F^i)$ abändern.

6) <u>Standardformen</u>: Wir sagen (M,N) habe <u>Standardform</u>, wenn

$$(M,N) = ((A,0),(B,0))$$

gilt für eine $i\times i$-Diagonalmatrix $B = diag(\pi_F^{e_1},...,\pi_F^{e_i})$ und eine nilpotente $i\times i$-untere Dreiecksmatrix A so daß

a) $e_1 \le e_2 \le ... \le e_i \le 0$ ist,

b) $B^{-1}\cdot A$ ganz ist.

Wir konstruieren für gegebenes $(M,N)\in Hom_F(F^{2j},F^i)$ Substitutionen aus $Sp(2j,\mathfrak{o}_F)\times Gl(i,\mathfrak{o}_F)$, welche (M,N) in Standardform bringen. Wir ersetzen dazu zeitweilig (M,N) durch $(N,-M)$ (durch Konjugation mit w_j wie in Schritt 5) und anschließend ersetzen wir diese Matrix durch ihre Transponierte in

$$Hom_F(F^i,F^{2j}) .$$

Damit operiert $Sp(2j, \mathfrak{o}_F)$ von links und $Gl(i, \mathfrak{o}_F)$ von rechts. Das Argument ist induktiv. Wir starten mit einer beliebigen Matrix in $Hom_F(F^i, F^{2j})$. Wir sagen, diese Matrix habe schwache partielle r-Standardform, falls sie von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} B_r & * \\ 0 & * \\ -A'_r & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

ist mit $r \leq i \leq j$ und $B_r = diag(\pi_F^{e_1}, .., \pi_F^{e_r})$ und $e_1 \leq ... \leq e_r \leq \infty$, mit einer echten oberen $r \times r$ Dreiecksmatrix A'_r so daß gilt

a) π^{e_r} teilt den ggT π^e aller mit $*$ bezeichneten Einträge der Matrix.

b) π^{e_ν} teilt alle Einträge der ν-ten Spalte $(1 \leq \nu \leq r)$.

Hat sie darüber hinaus die Gestalt

$$\begin{pmatrix} B_r & 0 \\ 0 & * \\ -A'_r & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

sagen wir, die Matrix hat <u>partielle r-Standardform</u>.

Jeder Repräsentant in schwacher partieller r-Standardform kann durch Elimination der rechten oberen Blockmatrix, in eine partielle r-Standardform übergeführt werden. Dies kann aber durch Rechtsmultiplikation mit einer Matrix aus $Gl(i, \mathfrak{o}_F)$ erreicht werden. In der Tat kann man die ersten r Zeilen der hinteren Spalten durch Spaltenadditionen ausräumen. Die Bedingung b) wird davon nicht tangiert, da $e_1 \leq ...e_r$ und e_r kleiner oder gleich dem ggT der verbleibenden Spalten (ab der $r+1$-sten) ist. Da hierbei das $\pi_F^{e-e_\nu}\lambda, \lambda \in \mathfrak{o}_F$-fache der ν-ten Spalte $(\nu \leq r)$ addiert wird, werden Einträge in $\pi_F^e \mathfrak{o}_F$ hinzuaddiert wegen b). Also verkleinert sich der ggT der hinteren Spalten bei diesem Ausräumprozeß nicht.

<u>Der Induktionsschritt</u>: Sei die Matrix in partieller $(r-1)$-Standardform. Wir betrachten die Spalten ab der r-ten Spalte. Durch Rechtsmultiplikation mit einer Permutationsmatrix aus $Gl(i, \mathfrak{o}_F)$ kann erreicht werden, daß der ggT π_F^e all dieser Spalten in der r-ten Spalte realisiert wird. Wir nennen den

r-ten Spaltenvektor $v \in F^{2j}$. Die ersten $r-1$ Einträge von v sind Null, da die ursprüngliche Matrix parielle $(r-1)$-Standardform hatte, und da nach Permutationen der Spalten ab der r-ten, die obersten Eintrğe dieser Spalten nach wie vor verschwinden.

Die weiteren Veränderungen, die wir vornehmen, involvieren nur noch Linksmultiplikationen mit Elementen aus $G(\mathfrak{o}_F)$. Diese Operationen verändern die Spalten ab der $(r+1)$-ten Stelle. Insbesondere zerstören sie die bislang vorhandene Eigenschaft, daß die ersten $(r-1)$ Koordinaten dieser Spalten verschwinden. Die gegebene Matrix ist aber insbesondere von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} B_{r-1} & 0 & * \\ 0 & * & * \\ -A'_{r-1} & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

so daß der ggT π_F^e der "mittleren" r-ten Spalte den ggT aller weiteren Spalten ab der $(r+1)$-sten teilt. Diese Bedingungen bleibt unter Substitutionen aus $G(\mathfrak{o}_F)$ erhalten. Daher kann man sich im Prinzip ganz auf die ersten r Spalten konzentrieren, da es genügt einen Repräsentanten in schwache partieller r-Standardform zu finden. Wir ignorieren daher von nun an die Spalten – beginnend von der $r+1$-sten Spalte.

Eine geeignete symplektische Transformation einer eingebetteten $Sp(2(j-r+1), \mathfrak{o}_F)$ macht durch Linksmultiplikation alle Einträge in v zu Null mit Ausnahme des r-ten und der $(j+1), ..., (j+r-1)$-ten Einträge. Weiterhin werden die ersten $r-1$ Spalten unseres Repräsentanten dabei nicht verändert! Zusätzlich kann erreicht werden, daß der r-te Eintrag eine Potenz π_F^f des Primelements ist. Beachte, daß die unimodularen symplektischen Matrizen transitiv auf den primitiven Vektoren operieren (siehe [F] Hilfssatz A.5.2).

Nach dieser Modifikation ist die Matrix bereits fast in schacher partieller r-Standardform. Sie hat die richtige Gestalt

$$\begin{pmatrix} B_r & * \\ 0 & * \\ -A'_r & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

und Bedingung a) ist erfüllt. Alle Bedingung wären erfüllt, falls der r-te Eintrag π_F^f der r-ten Spalte gleich π_F^e wäre. Ist dies nicht der Fall, gilt $e < f$.

Dann gibt es ein ν mit $1 \leq \nu < r$, so daß der ggT der r-ten Spalte an der $j+\nu$-ten Stelle liegt.

Wir wollen jetzt den ggT der Spalte v nach "oben" holen. Linksmultiplikation mit einer symplektisch unimodularen Substitution – gegeben auf den Vektoren w_i der Standardbasis von F^{2j} durch $w_\mu \mapsto w_\mu$ für $\mu \neq j+\nu, j+r$ und durch $w_{j+\nu} \mapsto w_{j+\nu} + w_r$ sowie $w_{j+r} \mapsto w_{j+r} + w_\nu$ – hat keinen Effekt auf die untere Hälfte; A'_r wird also nicht verändert. Auch die Nullblöcke auf der linken Seite werden nicht verändert. Die Matrix B_r wird dagegen modifiziert. Da die r-te Zeile von $-A'_r$ Null ist, verändert sich allerdings nur die letzte Zeile von B_r – durch Addition der ν-ten Zeile von $-A'_r$. Seien $x_1, ..., x_r$ die neuen Einträge. Zum Beispiel ist $x_r = \pi_F^{e_r} + \pi_F^{e} = \varepsilon \cdot \pi^e$ $(\varepsilon \in \mathfrak{o}_F^*)$.

Wir wollen nun das modifizierte B_r wieder in Diagonalgestalt bringen: Wir erreichen dies durch Linksmultiplikation mit einer unimodularen symplektischen Matrix der Gestalt $diag(U, E, (U')^{-1}, E)$. Hierbei sei

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \\ y_1 & y_2 & & y_{r-1} & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix} .$$

Diese Substitution transformiert $-A'_r$ in $-(U')^{-1} \cdot A'_r = -A'_r$ (die r-te Zeile von A'_r ist Null) und B_r in $U \cdot B_r$. Wählt man die y_ν geeignet, wird $U \cdot B_r$ diagonal mit den Einträgen $diag(\pi_F^{e_1}, ..\pi_F^{e_{r-1}}, \pi_F^{e})$. Hierzu braucht man die Bedingung $y_\nu \cdot \pi_F^{e_\nu} = -\varepsilon^{-1} x_\nu$. Wegen der Bedingung b) der zugrunde gelegten partiellen $(r-1)$-Standardform kann solche y_ν in $\mathfrak{o}_F$ finden. Damit ist $U \in Gl(r, \mathfrak{o}_F)$ und $diag(U, E, (U')^{-1}, E) \in G(\mathfrak{o}_F)$. Die Matrix hat jetzt schwache partielle r-Standardform mit $e_r = e$ und ist äquivalent zur ursprünglichen Matrix. Damit ist die Betrachtung des Induktionsschritts abgeschlossen.

Durch Iteration des obigen Verfahrens bringt man eine beliebige Matrix nach i Schritten in partielle i-Standardform. Rücktransponieren und anschließende Rückkonjugation mit w_j gibt eine zur gegebenen Matrix (M, N) äquivalente Matrix. Diese ist fast in Standardform. Sie hat die Gestalt

$(M,N) = ((A,0),(B,0))$ mit $B = diag(\pi_F^{e_1}, ..., \pi_F^{e_i})$ und einer unteren Dreiecksmatrix A, deren Diagonale verschwindet. Es gilt $e_1 \leq e_2 \leq ... \leq e_i \leq \infty$. Sei k maximal mit $e_k < 0$. Wegen Schritt 3) kann dann obdA $e_\nu = 0$ für $\nu > k$ angenommen werden. Dann ist auch B^{-1} definiert und ganz sowie $B^{-1}A$ ist ganz. Die Matrix ist also in Standardform.

Resume: Die Konstruktion ergibt, daß wir Repräsentanten der Doppelnebenklassen $H(F) \setminus G(F)/G(\mathfrak{o}_F)$ finden konnten der Gestalt $g = g((A,0),(B,0))$, für die angenommen werden kann:

- Die Matrix $B = diag(\pi_F^{e_1}, ..., \pi_F^{e_i})$ ist eine diagonale invertierbare $i \times i$-Matrix mit $e_1 \leq ... \; e_i \leq 0$.

- A ist eine untere Dreiecksmatrix.

- B^{-1} hat ganzzahlige Einträge.

- Die untere $i \times i$-Dreiecksmatrix $B^{-1} \cdot A$ hat ganzzahlige Einträge!

- Die Matrix $B^{-1} \cdot A'$ ist eine $i \times i$-Matrix mit ganzzahligen Einträgen.

7) Die quadratische Einbettung: Die Matrix $\Lambda_s = s \cdot J$ ist schiefsymmetrisch und es gilt $s \cdot J = J \cdot s$

$$\Lambda_s \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E \\ -E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Für $g \in G(F)$ sind die Bedingungen $g \in H(F)$ und $\lambda(g)^{-1}g' \cdot \Lambda_s \cdot g \;=\; \Lambda_s$ zueinander äquivalent; wegen $\lambda(g)^{-1} \cdot (g')^{-1} = JgJ^{-1}$ und $J^{-1}\Lambda_s = s$ ist die erste Gleichung gleichbedeutend mit $s \cdot g = g \cdot s$. Die Abbildung

$$Elm(H(F) \cdot g) \;= \lambda(g)^{-1}g' \cdot \Lambda_s \cdot g$$

definiert also eine Injektion

$$Elm: \; H(F) \setminus G(F) \;\hookrightarrow\; \Lambda^2(F^{2n})$$

der Kosets $H(F)\backslash G(F)$ in den Vektorraum $\Lambda^2(F^{2n})$ der schiefsymmetrischen $2n$-Matrizen.

Bemerkung: *Die quadratische Form $q(\Lambda) = Spur(\Lambda \cdot J \cdot \Lambda \cdot J)$ definiert eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform auf $\Lambda^2(F^{2n})$. Es gilt $q(\lambda(g)^{-1}g' \cdot \Lambda \cdot g) = q(\Lambda)$ für alle $g \in G(F)$.*

Notation: Zur Abkürzung schreiben wir

$$Elm(A, B)$$

für die Matrix $Elm(g(A, B, AB'))$. Die Matrix $Elm(A, B)$ ist alternierend und liegt in der symplektischen Gruppe $Sp(2n, F)$.

Dies ist klar nach Definition, da Λ_s und g in $G(F) = GSp(2n, F)$ liegen. Man kann nun die weiteren Rechnungen auf den Fall $i = j$ beschränken. Denn die Matrix $Elm(A, B)$ liegt in $Sp(2i, F) \times Sp(2(j-i), F)$, und ihre Komponente in $Sp(2(j-i), F)$ ist $J = J^{(j-i,j-i)}$.

8) Wir nehmen daher von jetzt der Einfachheit halber an $j = i$. Dann gilt

$$Elm(A, B) = \begin{pmatrix} 0 & X \\ -X' & \mathcal{A} \end{pmatrix}$$

mit den $n \times n$-Blockmatrizen $X = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 2A' & -E \end{pmatrix}$ und

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2(B \cdot A' - A \cdot B') & -2 \cdot B \\ 2 \cdot B' & 0 \end{pmatrix} .$$

Bemerkung: *Die schiefsymmetrische Matrix $\mathcal{A}$ ist invertierbar, denn B ist invertierbar.*

Also gibt es Matrizen Z und $\tilde{\mathcal{A}}$ mit

$$\begin{pmatrix} 0 & X \\ -X' & \mathcal{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & Z \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{A}} & 0 \\ 0 & \mathcal{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ Z' & E \end{pmatrix} .$$

Wir notieren $X = Z \cdot \mathcal{A}$, $\tilde{\mathcal{A}} = -Z \cdot \mathcal{A} \cdot Z'$ sowie $Z = X \cdot \mathcal{A}^{-1}$, $X' = -\mathcal{A} \cdot Z'$, $\tilde{\mathcal{A}} = Z \cdot X' = X \cdot \mathcal{A}^{-1} \cdot X'$.

Folgerung: *Die $(n \times n)$-Matrix Z ist symmetrisch. Insbesondere gilt*

$$g(Z) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ Z & E \end{pmatrix} \in G(F) \ .$$

<u>Zum Beweis der Folgerung</u>: $Z = X \cdot \mathcal{A}^{-1}$ erfüllt $Z = Z'$, falls $-\mathcal{A}' \cdot Z \cdot \mathcal{A} = \mathcal{A} \cdot X$ symmetrisch ist. Aber

$$\mathcal{A} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \cdot (B \cdot A' - A \cdot B') & -2 \cdot B \\ 2 \cdot B' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 2 \cdot A' & -E \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2B \cdot A' - 2A \cdot B' - 4B \cdot A' & 2B \\ 2B' & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \cdot (B \cdot A' + A \cdot B') & 2 \cdot B \\ 2 \cdot B' & 0 \end{pmatrix}$$

ist symmetrisch. Somit ist Z symmetrisch.

9)**Behauptung**: *Es gilt*

$$g(Z)' \cdot Elm(A, B) \cdot g(Z) = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{A}} & 0 \\ 0 & \mathcal{A} \end{pmatrix}$$

mit

$$\tilde{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}')^{-1} = -\mathcal{A}^{-1} \quad , \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2(BA' - AB') & -2 \cdot B \\ 2 \cdot B' & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Nach Annahme ist $\mathcal{A}$ invertierbar. Da $Elm(A, B)$ und $g(Z)$ und damit $g(Z)'$ symplektische Matrizen sind, folgt $\tilde{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}')^{-1}$. Beachte

$$\begin{pmatrix} E & -A \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \cdot B \\ 2 \cdot B' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ -A' & E \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2A \cdot B' & -2 \cdot B \\ 2 \cdot B' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ -A' & E \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2(A \cdot B' - B \cdot A') & -2 \cdot B \\ 2 \cdot B' & 0 \end{pmatrix} \ = \ \mathcal{A} \ .$$

Es folgt

$$-2\cdot Z = -2\cdot X\cdot \mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 2\cdot A' & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ A' & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B \\ -B' & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E & A \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E & 0 \\ A' & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -(B')^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & A \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -(B')^{-1} \\ -B^{-1} & -A'\cdot(B')^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & A \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -(B')^{-1} \\ -B^{-1} & -B^{-1}\cdot A - A'\cdot (B')^{-1} \end{pmatrix} .$$

Da die ursprüngliche Matrix in Standardform angenommen werden konnte, sind die Matrizen B^{-1} und $B^{-1}A$ ganz. Somit ist auch Z ganz. Folglich liegt die symplektische Matrix $g(Z)$ in $G(\mathfrak{o}_F)$.

Die Injektion Elm induziert eine Injektion

$$elm:\ H(F)\setminus G(F)/G(\mathfrak{o}_F) \ \hookrightarrow\ \Lambda^2(F^{2n})/G(\mathfrak{o}_F) \ .$$

Folgerung: *Sei (M,N) in Standardform. Betrachte die Klasse von $g(M,N) = g(A,B)$ in*

$$Gl(i,\mathfrak{o}_F)\setminus Hom_F(F^{2j},F^i)/Sp(2j,\mathfrak{o}_F) \ .$$

Ihr Bild in $\Lambda^2(F^{2n})/G(\mathfrak{o}_F)$ wird durch $elm(A,B)$ oder durch die symplektische Blockmatrix

$$diag(\tilde{\mathcal{A}},\mathcal{A}) \ = \ diag(-\mathcal{A}^{-1},\mathcal{A})$$

repräsentiert.

10) Elementarteiler: Man hat eine weitere offensichtliche Abbildung

$$\Lambda^2(F^{2n})/G(\mathfrak{o}_F) \ \to\ \Lambda^2(F^{2n})/(Gl(2n,\mathfrak{o}_F)\times \mathfrak{o}_F^*) \ .$$

Hierbei operiere $(h,\varepsilon)\in Gl(2n,\mathfrak{o}_F)\times\mathfrak{o}_F^*$ auf $\Lambda^2(F^{2n})$ vermöge $\Lambda\mapsto \varepsilon\cdot h'\cdot\Lambda\cdot h$. Wir nehmen dazu im Moment wieder allgemeiner an $i\le j$.

Lemma: *Die zusammengesetzte Abbildung*

$$H(F)\setminus G(F)\ /G(\mathfrak{o}_F) \quad\to\quad \Lambda^2(F^{2n})/(Gl(2n,\mathfrak{o}_F)\times\mathfrak{o}_F^*)$$

ist eine Injektion.

Zwei alternierende invertierbare Matrizen vom gleichen Rang m heißen äquivalent, wenn eine unimodulare Matrix h aus $Gl(m, \mathfrak{o}_F)$ existiert mit $\Lambda_1 = h' \cdot \Lambda_2 \cdot h$. Wir erinnern nun an ein klassisches Resultat von Frobenius:

A. Notwendig und hinreichend für Äquivalenz von Λ_1 und Λ_2 ist das Übereinstimmen der Elementarteiler im gewöhnlichen Sinn.

B. Das Produkt der ersten k Elementarteiler im gewöhnlichen Sinn erhält man als ggT aller $k \times k$-Minoren.

C. Für $\varepsilon \in \mathfrak{o}_F^*$ sind $\varepsilon \cdot \Lambda$ und Λ äquivalent.

Wir nehmen hier obdA wieder an $i = j$. Dann kann die alternierende $(n \times n)$-Matrix $\mathcal{A}$ durch eine geeignete unimodulare Transformation $U \in Gl(n, \mathfrak{o}_F)$ in folgende Standardform gebracht werden

$$U' \cdot \mathcal{A} \cdot U \ = diag\left(\begin{pmatrix} 0 & \pi_F^{a_1} \\ -\pi_F^{a_1} & 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 & \pi_F^{a_i} \\ -\pi_F^{a_i} & 0 \end{pmatrix}\right)$$

obdA mit $a_1 \leq ... \leq a_i$. Für die diagonalisierende Matrix U gilt dann

$$g = diag((U')^{-1}, U) \ \in \ Sp(2n, \mathfrak{o}_F) \subset Gl(2n, \mathfrak{o}_F) \ .$$

Die symplektische Matrix

$$diag(\tilde{\mathcal{A}}, \mathcal{A}) \ = \ diag((\mathcal{A}')^{-1}, \mathcal{A})$$

wird durch die Substitution $g \in G(\mathfrak{o}_F)$ in die <u>symplektische Normalform</u> übergeführt

$$diag\left(\begin{pmatrix} 0 & \pi_F^{-a_1} \\ -\pi_F^{-a_1} & 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 & \pi_F^{-a_i} \\ -\pi_F^{-a_i} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \pi_F^{a_1} \\ -\pi_F^{a_1} & 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 & \pi_F^{a_i} \\ -\pi_F^{a_i} & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Diese Normalform ist also in $\Lambda^2(F^{2n})/G(\mathfrak{o}_F)$ äquivalent zu $diag(\tilde{\mathcal{A}}, \mathcal{A})$ beziehungsweise zu $elm(M, N)$.

Wir behaupten nun $a_i \leq -a_i$,. Das heißt, die Elementarteilerexponenten dieser Matrix sind in aufsteigender Reihenfolge die Zahlen

$$a_1, a_1, a_2, a_2, ..., a_i, a_i, -a_i, -a_i, ..., -a_1, -a_1 \ .$$

Im Fall $j > i$ kommen natürlich noch $n - 2i$ Nullen in der Mitte hinzu. Die Elementarteiler von $diag(\tilde{\mathcal{A}}, \mathcal{A})$ bestimmen deshalb eindeutig die Exponenten $a_1 \le a_1 \le ... \le a_i \le a_i$ der symplektischen Normalform von $\mathcal{A}$. Daraus folgt sofort das obige Lemma.

Es bleibt allerdings noch $a_i \le 0$ zu zeigen. Wegen $\pi_F^{-a_i} = det(\mathcal{A})^{-1} \cdot \Lambda^{2i-1}(\mathcal{A})$ und wegen $det(\mathcal{A})^{-1} \cdot \Lambda^{2i-1}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^{-1}$ genügt dazu, daß $\mathcal{A}^{-1}$ ganz ist. Es gilt

$$\mathcal{A} = -2 \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B' & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

für die ganze Matrix $G = B^{-1}A - (B^{-1}A)'$. Somit

$$\mathcal{A}^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} (B')^{-1} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} .$$

Da B^{-1} ganz ist, ist somit die Matrix $\mathcal{A}^{-1}$ ganz und damit auch alle ihre Elementarteiler. Das obige Lemma ist damit vollständig bewiesen.

Zum Beweis der Proposition genügt es also wegen des obigen Lemmas, daß die Elementarteiler der Matrizen

$$Elm\Big(g(e_1, .., e_i)\Big) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E \\ -E & 0 & 0 & -2 \cdot D \\ 0 & E & 2 \cdot D' & 0 \end{pmatrix}$$

paarweise verschieden sind, und daß jede im obigen Sinne auftretende Kombination realisiert wird. Dies ist aber klar. Die Elementarteiler von

$$Elm(g(e_1, .., e_i))$$

sind durch $\pi_F^{e_1}, \pi_F^{e_1}, .., \pi_F^{e_r}, \pi_F^{e_r}, 1, 1, ...$ gegeben, wobei $r \le i$ maximal gewählt sei mit $e_r < 0$. Es folgen noch Paare von Einsern und dann die Inversen – es genügt nämlich die Minoren im rechten unteren $n \times n$-Block zu betrachten. Daraus folgt die Inäquivalenz der Repräsentanten und somit ist die Proposition bewiesen.

<u>Ein Twist</u>: Wir betrachten nun den Fall $n = i + j$ für $i = j$. In diesem Fall ist der Normalisator N_s von $H = G_s$ nicht zusammenhängend; der Zentralisator

von s in der adjungierten Gruppe ist nichttrivial. Das Element

$$w = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & E & 0 \end{pmatrix}$$

der Ordnung 2 in G_s erzeugt $N_s/G_s \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Es gilt $ws = -sw$ und $wJ = Jw$.

Sei K/F eine quadratische Erweiterung und σ der nichttriviale Automorphismus dieser Erweiterung. Da $H^1(F, GSp(2n))$ trivial ist, gibt es ein Element $g_0 \in GSp(2n, K)$ mit

$$g_0^{-1}\sigma(g_0) = w \quad , \quad \sigma(g_0) = g_0 \cdot w \ .$$

Falls K/F unverzweigt ist, kann man sogar erreichen $g_0 \in G(\mathfrak{o}_K)$. Sei $K = F(\sqrt{A})$. Dann wähle zum Beispiel

$$g_0 = \begin{pmatrix} X(a) & X(b) \\ X(c) & X(d) \end{pmatrix} \quad , \quad X(z) = \begin{pmatrix} E & E \\ z\sqrt{A} \cdot E & -z\sqrt{A} \cdot E \end{pmatrix}$$

mit $a, b, c, d \in F^*$ mit $ad - bc \neq 0$ und $ad = -bc$. Die Gruppe

$$\tilde{H} = g_0 H g_0^{-1}$$

ist invariant unter σ, und definiert eine Form $\tilde{H}$ von H über F zusammen mit einer Einbettung $\tilde{H} \hookrightarrow G$ über F. Es gilt

$$1 \to \tilde{H} \to Res_{K/F}(GSp(2i)) \to Res_{K/F}(G_m) \to 1 \ .$$

Der Morphismus rechts ist gegeben durch $g \mapsto (\sigma(\lambda(g))/\lambda(g)$. Für invertierbares $D = diag(d_1, ..., d_i)$ betrachten wir die Matrizen $g(D) \in G(K)$. Dann gilt

$$w \cdot g(D) = g(D') \cdot w \ .$$

Wegen $D = D'$ vertauschen daher w und $g(D)$. Es folgt $\sigma(g_0 \cdot g(D) \cdot g_0^{-1}) = g_0 w \cdot \sigma(g(D)) w g_0^{-1}$. Sind alle $d_\nu \in F$, gilt daher

$$\tilde{g}(D) = g_0 g(D) g_0^{-1} \in G(F) \ .$$

Man hat die natürliche Abbildung

$$\tilde{H}(F) \setminus G(F)/G(\mathfrak{o}_F) \;\to\; g_0H(K)g_0^{-1} \setminus G(K)/G(\mathfrak{o}_K)\ .$$

Man erhält durch Konjugation aus der bereits gezeigten Zerlegung – nun über K anstelle von F –

$$g_0H(K)g_0^{-1} \setminus G(K)/G(\mathfrak{o}_K) \;=\; \bigsqcup_D \; g_0H(K)g_0^{-1} \cdot \tilde{g}(D) \cdot g_0G(\mathfrak{o}_K)g_0^{-1}\ .$$

Im unverzweigten Fall kann obdA angenommen werden $g_0G(\mathfrak{o}_F)g_0^{-1} = G(\mathfrak{o}_F)$. Die obigen Abbildungen zwischen Doppelnebenklassen vertauschen mit der Operation von σ. Dies folgt aus den genannten Eigenschaften der Matrix w (!). Aus Elementarteilerbetrachtungen folgt in diesem unverzweigten Fall, daß jedes $g \in G(F)$ in einer Doppelnebenklasse mit Repräsentant $g(D)$ liegt, für die $v_K(d_\nu) \in v_K(F^*)$ liegt. Wir können also Repräsentanten $g(D)$ wählen mit $d_\nu \in F^*$ $(\nu = 1,..,i)$. Das heißt

$$g \in \tilde{H}(K) \cdot \tilde{g}(D) \cdot G(\mathfrak{o}_K) \quad , \quad \sigma(\tilde{g}(D)) = \tilde{g}(D)\ .$$

Es folgt $g = g_0hg_0^{-1} \cdot \tilde{g}(D) \cdot k_0^{-1}$ mit

$$\sigma(g_0)\sigma(h)\sigma(g_0)^{-1} \cdot \tilde{g}(D) \cdot \sigma(k_0^{-1}) = g_0hg_0^{-1} \cdot \tilde{g}(D) \cdot k_0^{-1}\ .$$

Also $g_0(h^{-1}w\sigma(h)w)g_0^{-1} = \tilde{g}(D) \cdot k_0\sigma(k_0)^{-1} \cdot \tilde{g}(D)^{-1}$ oder

$$h^{-1}w\sigma(h)w = g(D) \cdot k^{-1}w\sigma(k)w \cdot g(D)^{-1}\ .$$

Hierbei sind $h \in H(K)$ und $k \in G(\mathfrak{o}_K)$.

Sei $H_D = H(K) \cap g(D)G(\mathfrak{o}_K)g(D)^{-1}$.

Offensichtlich ist H_D konjugationsinvariant unter w und es gilt $b(\sigma) = h^{-1}w\sigma(h)w \in H_D$. Gilt $b(\sigma) = y^{-1}w\sigma(y)w$ für ein $y \in H_D$, kann h von rechts um y abgeändert werden, so daß gilt $hy \in \tilde{H}(F)$. In diesem Fall folgt $g \in \tilde{H}(F) \cdot \tilde{g}(D) \cdot G(\mathfrak{o}_F)$. Die Obstruktion für die Existenz von y liegt in $H^1(K/F, H_D)$.

<u>Die auftretenden kompakten Gruppen</u>: Sei nun allgemeiner wieder $i \leq j$. Die wie oben definierte Gruppe H_D ist eine kompakt offene Untergruppe von

$H(K)$. Das Element

$$h \;=\; \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \beta_2 \\ \gamma_1 & 0 & \delta_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 & \delta_2 \end{pmatrix}$$

in $H(K)$ erfüllt die symplektischen Bedingungen $\alpha_i'\delta_i - \gamma_i'\beta_i = \lambda \cdot E, \lambda \in \mathfrak{o}_F^*$, $\alpha_i'\gamma_i = \gamma_i'\alpha_i$, $\gamma_i\delta_i' = \delta_i'\beta_i$. Es liegt in H_D, falls

$$g(D)^{-1} \cdot h \cdot g(D) \;=\; \begin{pmatrix} \alpha_1 & -D\gamma_2 & -D\gamma_2 D' + \beta_1 & -D\delta_2 + \alpha_1 D \\ -D'\gamma_1 & \alpha_2 & -D'\delta_1 + \alpha_2 D' & -D'\gamma_1 D + \beta_2 \\ \gamma_1 & 0 & \delta_1 & \gamma_1 D \\ 0 & \gamma_2 & \gamma_2 D' & \delta_2 \end{pmatrix}$$

in $G(\mathfrak{o}_K)$ liegt. Insbesondere sind dann $\alpha_i, \gamma_i, \delta_i$ und $D'\gamma_1, D\gamma_2$ und $\gamma_2 D'$ sowie $\gamma_1 D$ ganz. Zusätzlich gilt $det(h) \in \mathfrak{o}_K^*$ sowie

$$\beta_1 \equiv D\gamma_2 D' \quad , \quad \beta_2 \equiv D'\gamma_1 D$$

$$D\delta_2 \equiv \alpha_1 D \quad , \quad D'\delta_1 \equiv \alpha_2 D' \ .$$

Da D^{-1} ganz ist, folgt dann automatisch: Sowohl

- $D^{-1}\beta_1, \beta_1(D')^{-1}, (D')^{-1}\beta_2, \beta_2 D^{-1}$
- als auch $D^{-1}\alpha_1 D, D'\delta_1(D')^{-1}, D\delta_2 D^{-1}, (D')^{-1}\alpha_2 D'$

sind notwendig ganz.

Setze für $k = 1,2$ und die quadratischen Matrizen $D_1 = diag(\pi_F^{e_1}, .., \pi_F^{e_i})$ respektive $D_2 = diag(\pi_F^{e_1}, .., \pi_F^{e_i}, 1, ..., 1)$

$$g_k := \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & D_k \\ E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ \gamma_k & \delta_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & D_k \\ E & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} D_k\delta_k D_k^{-1} & D_k\gamma_k \\ \beta_k D_k^{-1} & \alpha_k \end{pmatrix}$$

und

$$\Lambda_{D_k} = \begin{pmatrix} 0 & D_k^{-1} \\ -D_k^{-1} & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Dann ist Λ_{D_k} ganzzahlig und alternierend.

Die paramodularen Gruppen: Wir betrachten im Moment zuerst wieder den Spezialfall $i = j$. $D^{-1} = D_1^{-1}$ ist dann eine ganzzahlige Diagonalmatrix vom Rang i. Sei Λ_D die zugehörige alternierende Matrix, definiert wie oben. Dann bezeichne $GSp(\Lambda_D)$ die Matrixgruppe aller

$$\{h \in Gl(F^{2i}) \; | h'\lambda_D h = \lambda \cdot \Lambda_D, \lambda \in F^*\} \ .$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt dann für die Matrizen $g_k, k = 1,2$ des vorigen Abschnitts

$$g_k \in GSp(\Lambda_D) \quad , \quad k = 1,2 \ .$$

Sei $\mathcal{G} = M_{i,i}(\mathfrak{o}_F) \cdot D^{-1} \subset M_{i,i}(\mathfrak{o}_F)$. Die obigen Kongruenzen sind dann equivalent zu den Kongruenzen $b_1 \equiv c_2$, $c_1 \equiv b_2$, $d_1 \equiv a_2$ und $a_1 \equiv d_2$ modulo $\mathcal{G}$. Die Ganzheitsbedingungen besagen gerade, daß a_k, b_k, c_k, d_k ganz sind und daß $D^{-1}a_kD$, $D^{-1}b_kD$, $D^{-1}c_kD$ und $D^{-1}d_kD$ ganz sind (für $k = 1,2$). Zusätzlich müssen die Multiplikatoren von g_k übereinstimmen und in $\mathfrak{o}_F^*$ liegen. Konjugation mit w operiert durch Vertauschen von g_1, g_2.

Sei $\Gamma = (\mathfrak{o}_F)^{2i}$ das Standardgitter in F^{2i}. Λ_D definiert eine alternierende Paarung $\langle .,. \rangle_D$ auf Γ. Setze $\langle v, w\rangle_D = v'\Lambda_D w$. Das Dual $\Gamma^* = \{w \in F^{2i} \mid \langle w, \Gamma\rangle_D \in \mathfrak{o}_F\}$ ist $\Gamma^* = diag(D,D)(\Gamma)$. Substitutionen g in der kompakt offen Untergruppe $Aut(\Gamma, \Lambda_D) \subset GSp(\Lambda_D)$ erhalten Γ^*, d.h. $g(\Gamma^*) = \Gamma^*$ oder äquivalent $diag(D,D)^{-1} \cdot g \cdot diag(D,D) \in Aut(\Gamma)$. Das heißt, die Blockeinträge von g sind ganz nach Konjugation mit $D^{-1} \, . \, D$. Da Λ_D ganzzahlig ist gilt $\Gamma \subset \Gamma^*$. Man erhält einen Homomorphismus

$$Aut(\Gamma, \Lambda_D) \to Aut(\Gamma^*/\Gamma) \ .$$

Es bezeichne $K(D)$ den Kern dieser Abbildung; $g \in K(D) \iff g \equiv E$ modulo $\mathcal{G}$. Rückkonjugation in die Gruppe $GSp(2i, \mathfrak{o}_F)$ bildet $K(D)$ ab auf die Untergruppe der Matrizen, welche die Kongruenzbedingungen

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} E + \overline{a}D^{-1} & \overline{b} \\ D^{-1}\overline{c}D^{-1} & E + D^{-1}\overline{d} \end{pmatrix} \quad , \quad \overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d} \in M_i(\mathbb{Z})$$

erfüllen.

Es gilt $diag(E, -E) \in GSp(\Lambda_D)$ und $J \in GSp(\Lambda_D)$, somit

$$I = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix} \in GSp(\Lambda_D) \ ,$$

insbesondere also auch

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GSp(\Lambda_D) \iff g^I = IgI = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \in GSp(\Lambda_D) \ .$$

Mit obigen Bezeichnungen folgt: $g_1, g_2 \in Aut(\Gamma, \Lambda)$ – zusammen mit der Kongruenzbedingung und Multiplikatorbedingung – charakterisiert H_D. Genauer, die obige Einbettung $h \mapsto (k_1, k_2) = (g_1, g_2^I)$ von $H(F)$ nach $GSp(\Lambda_D) \times GSp(\Lambda_D)$ stiftet einen Isomorphismus

$$H_D \ \cong \ \{(k_1, k_2) \in Aut(\Gamma, \Lambda_D) \mid k_1 k_2^{-1} \in SK(D) = K(D) \cap Sp(\Lambda_D)\} \ .$$

Somit operiert w vermöge $(k_1, k_2) \mapsto (k_2^I, k_1^I)$.

Beispiel: Sei $D = d \cdot E$. Dann ist $Aut(\Gamma, \Lambda_D) = G(\mathfrak{o}_F)$ und $GSp(\Lambda_D) = GSp(2i, F)$.

Der allgemeine Fall $i \leq j$: Offensichtlich hat man in diesem allgemeinen Fall eine split exakte Sequenz

$$1 \to SK(D_2) \to H_D \to GSp(\Lambda_{D_1}) \to 1 \ .$$

Die Splittung ist gegeben durch

$$GSp(\Lambda_{D_1}) \ni g_1 \mapsto \left(g_1, \begin{pmatrix} g_1^I & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}\right) \in H_D \ .$$

Somit ist H_D ein semidirektes Produkt aus $GSp(\Lambda_{D_1})$ und dem Kern. Eine Matrix liegt im Kern, falls sie Multiplikator 1 besitzt und wenn außerdem bezüglich der Koordinaten $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2$ gilt: $\alpha_1 = \delta_1 = a_1 = d_1 = E$ und $\beta_1 = \gamma_1 = b_1 = c_1 = 0$ sowie die Kongruenzbedingungen $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2 \in \mathfrak{o}_F$ und $(\delta_2 - E)D \equiv 0$, $(\alpha_2 - E)D' \equiv 0$ und $D\gamma_2 \equiv 0$, $\gamma_2 D' \equiv 0$ und $D\gamma_2 D' \equiv 0$ modulo ganzer Matrizen erfüllt sind. Diese Kongruenzen sind äquivalent mit den entsprechenden Kongruenzen, in denen die $(i \times j)$-Matrix D durch $(j \times j)$-Matrix D_2 ersetzt wird. Somit ist der Kern isomorph zu der normalen Untergruppe $SK(D_2) = Sp(\Lambda_{D_2}) \cap K(D_2)$ von $GSp(\Lambda_{D_2})$.

Literatur:

[S] M.Schröder, Dissertation Mannheim 1992

[F] E.Freitag, Siegelsche Modulformen, Springer Verlag